Approfondiamo il significato del delta

Introduzione

Una richiesta da parte di alcuni utenti mi spinge a trattare un argomento sul quale, spesso, si fa un po' di confusione: il significato che dobbiamo attribuire alla greca delta. In queste brevi note cercheremo di fare un po' di chiarezza.

Rinfreschiamo la simbologia usata internazionalmente

Ricordo che le principali variabili che intervengono nel modello di B&S sono così indicate:

S_0: il prezzo corrente del sottostante (o, all'istante considerato iniziale);

K: il prezzo di esercizio (o strike);

T: la vita residua del contratto;

σ: la volatilità implicita (leggi: "sigma");

r: il tasso di interesse privo di rischio;

D: i dividendi attesi durante la vita dell'opzione;

c: il prezzo corrente della call;

p: il prezzo corrente della put.

Ricordiamo la definizione di delta

La definizione formale è la seguente:

***Il delta di un'opzione è la derivata parziale prima del prezzo della stessa rispetto al sottostante*.**

In simboli, nel caso di una call, scriveremo:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

dove il delta è stato indicato con la lettera greca delta maiuscola (Δ).

Formula di Black, Scholes e Merton (B&S)

Di questa formula non vi è mai stata, fino a questo momento, l'occasione per parlarne. Non ho il tempo, in questo periodo, per presentarvela come conviene. Si potrebbe scrivere un libro, su questa formula e forse anche più d'uno. Si pensi che Ian Stewart, matematico ed autore di *In pursuit of the unknown: 17 equations that changed the world*,[1] individua 17 equazioni che hanno letteralmente cambiato il mondo ed il nostro modo di pensare e, fra queste, compare la curva di Gauss e, appunto, la formula di B&S.

Così, come, potrei parlarvi della curiosa nascita di questo modello, che ufficialmente avviene nel 1973, e di come, la sua pubblicazione, sia stata rifiutata da ben due diversi editori! Ha dell'incredibile se si pensa che

[1] Il testo è stato pubblicato anche in Italia da Einaudi, nel 2017, per la collana ET Saggi, con il titolo: *Le 17 equazioni che hanno cambiato il mondo*.

nel 1997 Scholes e Merton riceveranno, per tale lavoro, l'ambitissimo premio Nobel (Black, purtroppo, era morto due anni prima). Ma di questo, se ve ne sarà l'occasione, ne parleremo un'altra volta.

E allora, non essendoci tempo, partiamo subito con la formula.

Il modello di B&S consente di valutare il prezzo di una call e di una put europee scritte su titoli che non pagano dividendi:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

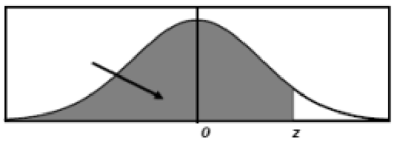
dove:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

La simbologia impiegata è già stata spiegata, tranne la funzione N(z). Si tratta della cumulata di una normale standardizzata. In altri termini, rappresenta la probabilità che una variabile con una distribuzione normale standardizzata assuma un valore inferiore a z.

Normale Standardizzata



$$-\infty < \Pr(Z) \leq z = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt$$

(a) Integrali della variabile casuale normale standardizzata

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361

Figura 1

Geometricamente, tale probabilità, la possiamo anche vedere come l'area indicata in figura 1, che si ottiene calcolando l'integrale improprio (definito da meno infinito a z) della curva a campana della medesima figura. Naturalmente, quando occorre valutare tale probabilità, non si ricorre al calcolo dell'integrale ma è sufficiente far uso della tavola di figura 1. Oppure, come mostrerò più avanti, delle formule che Excel ci mette a disposizione.

Delta

Si può dimostrare che, nel caso di una call europea il cui sottostante è un titolo che non paga dividendi, il delta vale:

$$\Delta = N(d_1)$$

dove d_1 è stato definito in precedenza. Si tratta di un valore positivo, essendo una probabilità un numero positivo compreso tra 0 ed 1. Mentre, nel caso di una put europea il cui sottostante è un titolo che non paga dividendi, avremo, per il delta:

$$\Delta = N(d_1) - 1$$

In questo caso, invece, il valore del delta è certamente negativo (al massimo zero quando $N(d_1) = 1$).

Sul significato del delta, avendolo trattato ampiamente in una serie di precedenti articoli, non mi dilungo. Mi preme, però, sottolineare che, a differenza di quanto si legge in rete (e, purtroppo, anche su taluni testi), il delta non rappresenta la probabilità che un'opzione scada ITM. Talvolta, in questa affermazione, compare l'avverbio di quantità "quasi" e, in questo caso, mi sento di accettarla. È importante, però, che il trader in opzioni sia ben conscio del significato del delta in quanto, da tale conoscenza, derivano, poi, scelte di assunzione di rischi sul mercato!

Cosa dire, invece, di $N(d_2)$? Ecco, questa grandezza rappresenta effettivamente la probabilità, secondo la misura neutrale del rischio[2], che l'opzione scada *in the money*.

E allora, proviamo a fare qualche simulazione con un foglio Excel per acquisire maggior confidenza con queste variabili.

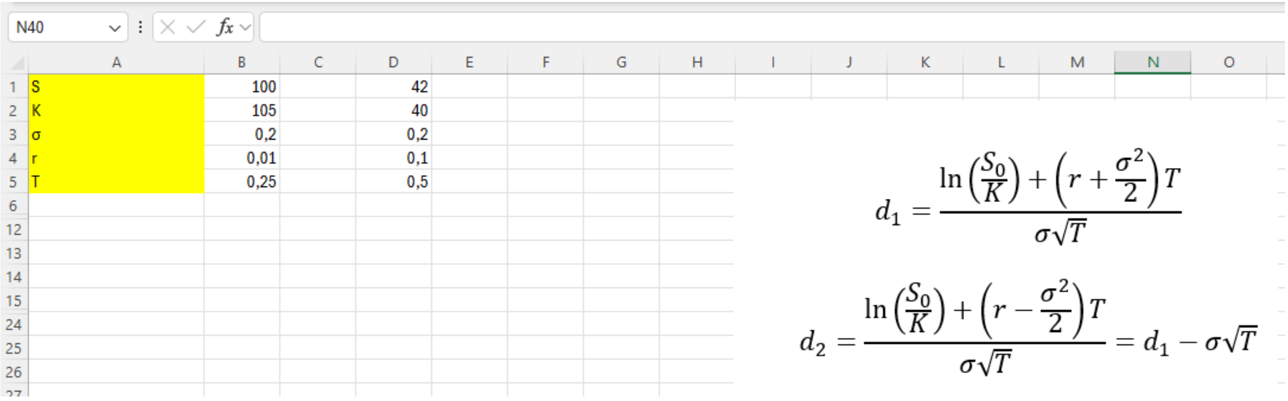
Giochiamo con la formula di B&S

Riportiamo su un foglio Excel tutte le variabili necessarie per calcolare $N(d_1)$ e $N(d_2)$. Per semplicità, non consideriamo il caso di titoli che pagano dividendi (in questi casi, la formula si complica un po' ma, la sostanza, non cambia).

Il foglio, visibile in figura 2, mostra che in colonna A sono state riportate le cinque variabili che ci occorreranno per calcolare d_1 e d_2. In colonna B e D, invece, ho riportato i valori relativi a due esempi che sto per proporvi. Nel primo caso (colonna B), abbiamo un titolo che quota 100 € relativamente al quale prendiamo in considerazione un'opzione call con strike 105 €, una volatilità implicita del 20%, ed una scadenza di tre mesi. Attenzione: nella formula di B&S la durata va sempre espressa in anni. Pertanto, nel caso di tre mesi, questo significa un quarto d'anno. E, quindi, T=0,25. Il tasso di interesse privo di rischio è del 1%. Si tratta, quindi, di un'opzione OTM. Nel secondo caso, invece, i dati si riferiscono ad un'opzione ITM. Cambia, inoltre, il tasso di interesse e la durata dell'opzione medesima. Poi, per comodità, ho riportato anche le formule che andremo a costruire.

---

[2] In un mondo neutrale verso il rischio tutti gli individui sono neutrali verso il rischio. In questo mondo gli investitori non chiedono di essere compensati per il rischio ed il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli è il tasso di interesse privo di rischio (r).



	A	B	C	D
1	S	100		42
2	K	105		40
3	σ	0,2		0,2
4	r	0,01		0,1
5	T	0,25		0,5

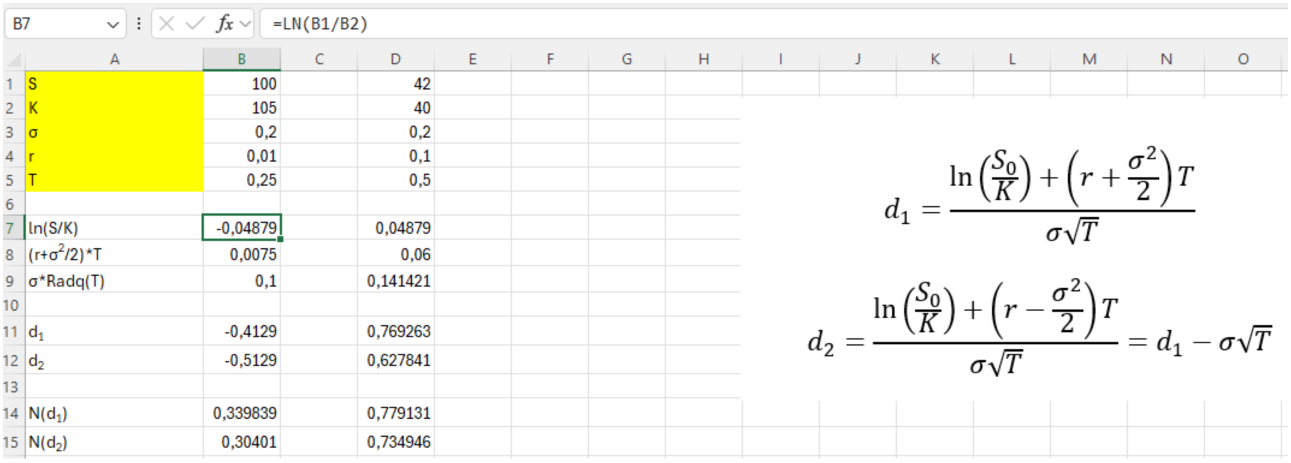
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Figura 2

Se si è poco pratici con l'uso delle formule, suggerisco di costruirle "per pezzi", in modo da limitare le possibilità di errore. Vediamo come fare.

La colonna A continuo ad impiegarla per riportare, sulle varie celle, il nome delle formule parziali.



B7 =LN(B1/B2)

	A	B	C	D
1	S	100		42
2	K	105		40
3	σ	0,2		0,2
4	r	0,01		0,1
5	T	0,25		0,5
6				
7	ln(S/K)	-0,04879		0,04879
8	$(r+\sigma^2/2)$*T	0,0075		0,06
9	σ*Radq(T)	0,1		0,141421
10				
11	d_1	-0,4129		0,769263
12	d_2	-0,5129		0,627841
13				
14	$N(d_1)$	0,339839		0,779131
15	$N(d_2)$	0,30401		0,734946

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Figura 3

Per esempio, nella cella A7 ho riportato la formula parziale del primo addendo del numeratore di d_1; mentre, in cella B7 (il cui contenuto è visibile in figura 3, nella barra della formula) vi è la formula Excel per il calcolo di quel logaritmo naturale. E così via. Il secondo addendo è calcolato in B8; e, in B9, abbiamo il denominatore di d_1 (vedi figure 4 e 5).

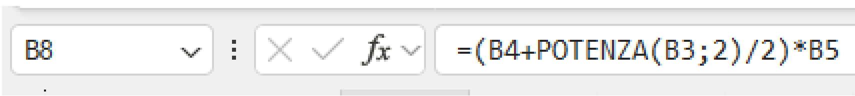


Figura 4

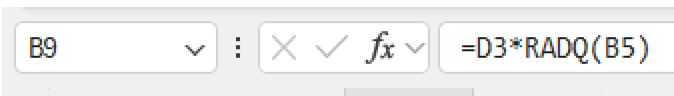


Figura 5

Infine, nelle celle B11 e B12 abbiamo il calcolo di d_1 e d_2. E, finalmente, le probabilità $N(d_1)$ ed $N(d_2)$ sono riportate nelle celle B14 e B15.

È questo, ciò che intendevo "per pezzi"!

Ed ora, discutiamone i risultati

Abbiamo prima affermato che $N(d_1)$ è il delta e $N(d_2)$ è la probabilità che quell'opzione scada ITM. Ora, osserviamo quanto abbiamo ottenuto nel caso del primo esempio (colonna B). Il delta di quell'opzione è prossimo al 34% (33,98%) mentre, $N(d_2)$, è pari a poco più del 30% (30,40%). Possiamo dire che la probabilità che quell'opzione scada ITM è pari al delta, ovvero al 34% circa? Evidentemente no, non sono uguali! Possiamo dire che sono "quasi" uguali? Ognuno dia la risposta che crede. Ricordiamoci, però, che la conoscenza di questi (e di altri) parametri è quella che poi, alla fine, ci guida verso la decisione se comprare o vendere quella opzione, oppure non fare nulla.

Ma andiamo avanti. Che cosa succede se raddoppiamo il valore della volatilità implicita portandolo, nel primo esempio, dal 20% al 40%? Il risultato è mostrato in figura 6.

I22

	A	B	C	D
1	S	100		42
2	K	105		40
3	σ	0,4		0,2
4	r	0,01		0,1
5	T	0,25		0,5
6				
7	ln(S/K)	-0,04879		0,04879
8	$(r+\sigma^2/2)*T$	0,0225		0,06
9	σ*Radq(T)	0,1		0,141421
10				
11	d_1	-0,2629		0,769263
12	d_2	-0,4629		0,627841
13				
14	$N(d_1)$	0,396313		0,779131
15	$N(d_2)$	0,321717		0,734946
16				

Figura 6

Se, prima, quelle due percentuali erano distanti di poco meno del 4%, ora la distanza è quasi raddoppiata! E cosa accade se aumentiamo la durata del contratto portandola ad un anno? Il risultato lo troviamo in figura 7: questa volta la distanza percentuale, rispetto al primo esempio, è praticamente quadruplicata.

Spero che questi pochi esempi possano servire al lettore per ben comprendere lo scopo di questo articolo: il delta di un'opzione non è la probabilità che questa scada ITM. Se, qualche volta, possiamo accettare una tale ipotesi, dobbiamo sempre assicurarci che quel "quasi" sia numericamente in linea con quanto ci attendiamo da quel trade.

B5 fx 1

	A	B	C	D
1	S	100		42
2	K	105		40
3	σ	0,4		0,2
4	r	0,01		0,1
5	T	1		0,5
6				
7	ln(S/K)	-0,04879		0,04879
8	$(r+\sigma^2/2)*T$	0,09		0,06
9	σ*Radq(T)	0,2		0,141421
10				
11	d_1	0,206049		0,769263
12	d_2	-0,19395		0,627841
13				
14	$N(d_1)$	0,581624		0,779131
15	$N(d_2)$	0,423107		0,734946

Figura 7

Inoltre, invito il lettore a continuare ad esercitarsi con il foglio Excel proposto.

Conclusioni

Affermare che il delta di un'opzione sia pari alla probabilità che quell'opzione scada ITM, in alcuni casi, può essere un'ipotesi accettabile; ma, in altri casi, sarà grossolanamente errata. E, se si usano queste informazioni per prendere decisioni in merito al nostro trading, allora non dobbiamo stupirci se, poi, gli esiti delle nostre negoziazioni non sono quelli attesi.

Come sempre, buon studio!